انتگرال

در جلسه گذشته روش‌هایی برای محاسبه‌ی مشتق تابع $f(x)$ ارائه کردیم. اما در حل بسیاری از مسائل لازم است که عکس این روند را انجام دهیم. به عبارت دیگر، در این جلسه فرض بر این است که $f'(x)$ داده شده و منظور تعیین تابع $f(x)$ است. فرآیند تعیین تابع $f(x)$ از $f'(x)$ را ضدمشتق‌گیری یا انتگرال‌گیری می‌نامیم.

تعریف:

تابع $F(x)$ را یک تابع اولیه یا ضدمشتق یا پادمشتق $f(x)$ در بازه I می‌نامیم. اگر به ازای هر x از I داشته باشیم

$$F'(x) = f(x)$$

مثال: یک تابع اولیه برای تابع $f(x) = 3x^2$ به دست آورید.

$F(x) = x^3$ تابع اولیه $f(x)$

$F'(x) = (x^3)' = 3x^2$

$F_1(x) = x^3 + 1$

$F_1(x) = x^3 - 6$

$F_2(x) = x^3 - \sqrt{5}$

همگی یک تابع اولیه برای $f(x) = 3x^2$ هستند زیرا $F_1'(x) = F_2'(x) = F_3'(x) = 3x^2$

قضیه: اگر $F_1(x)$ و $F_2(x)$ دو تابع اولیه $f(x)$ در بازه I باشند آن‌گاه عدد ثابتی مانند c وجود دارد به طوری که

$$F_1(x) - F_2(x) = c$$

نتیجه: پس به این ترتیب نتیجه می‌شود که اگر $F(x)$ یک تابع اولیه $f(x)$ باشد، آن‌گاه هر تابع اولیه $f(x)$ به صورت $F(x)+c$ است، که در آن c مقدار ثابتی است.

تعریف: اگر $F(x)$ یک تابع اولیه $f(x)$ در بازه‌ی I باشد، عبارت $F(x)+c$ را که در آن c عدد ثابتی است انتگرال نامعین تابع f می‌نامیم و با $\int f(x)dx$ نشان می‌دهیم. بنابراین:

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

نکته: همواره متغیر انتگرال‌گیری را با نوشتن حرف d در جلوی آن مشخص می‌کنیم. برای مثال اگر متغیر انتگرال‌گیری t باشد، برای نمایش انتگرال تابع $f(t)$ می‌نویسیم $\int f(t)dt$. و محاسبه‌ی تابع اولیه f را انتگرال‌گیری از تابع f می‌نامیم.

ویژگی های انتگرال نامعین

فرض کنیم توابع f و g بر بازه‌ی I مشتق‌پذیر باشند :

الف) اگر c عدد ثابتی باشد داریم :

$$\int c f(x)\,dx = c\int f(x)\,dx$$

ب)

$$\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$$

این رابطه را می‌توان برای تعداد متناهی تابع تعمیم داد .

دستورهای انتگرال گیری

همان طور که دیدیم ، هر دستور مشتق گیری می تواند دستوری برای به دست آوردن انتگرال نامعین نیز باشد . در زیر دستورهای انتگرال گیری لازم آورده شده است . درستی این دستورها را با مشتق گیری از دو طرف تساوی می توان تحقیق کرد . در تساوی های زیر c عدد ثابتی است که به ثابت انتگرال گیری موسوم است .

$$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$$

(۱) برای هر $n \neq -1$

① $\int x^2\,dx = \frac{1}{2+1}x^{2+1}+C$

② $\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{3}{2}}+C$

③ $\int 4\sqrt[2]{x^3}\,dx = 4\int x^{\frac{3}{2}}\,dx = 4\left(\frac{1}{\frac{3}{2}+1}x^{\frac{3}{2}+1}\right)dx = 4\left(\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right)+C$

④ $\int (3x^2-4x+2)\,dx = 3\int x^2\,dx - 4\int x\,dx + \int 2\,dx = 3\frac{x^{2+1}}{2+1} - 4\frac{x^{1+1}}{1+1} + 2\frac{x^{0+1}}{0+1}+C$

⑤ $\int x^2\sqrt{x}\,dx = \int x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}}\,dx = \int x^{\frac{5}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1} = \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}+C$

⑥ $\int \frac{x^4+2x^3-3x^2+4\sqrt{x}-5}{x^2}\,dx = \int \frac{x^4}{x^2}dx + 2\int\frac{x^3}{x^2}dx - 3\int\frac{x^2}{x^2}dx + 4\int\frac{\sqrt{x}\,dx}{x^2} - 5\int\frac{dx}{x^2}$

$$\int x^2\,dx + 2\int x\,dx - 3\int dx + 4\int \underbrace{x^{\frac{1}{2}-2}}_{x^{\frac{-3}{2}}}\,dx - 5\int x^{-2}\,dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} + 2\frac{x^{1+1}}{1+1} - 3x + 4\frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} + 5\frac{x^{-2+1}}{-2+1}+C$$

۷ $\int (x^{۲} - ۳x\sqrt[۵]{x} + \frac{۷}{\sqrt{x}})\,dx = \int (x^{۲} - ۳x \cdot x^{\frac{۱}{۵}} + ۷x^{-\frac{۱}{۲}})\,dx = \int (x^{۲} - ۳x^{\frac{۶}{۵}} + ۷x^{-\frac{۱}{۲}})\,dx$

$$\frac{x^{۲+۱}}{۲+۱} - ۳\frac{x^{\frac{۶}{۵}+۱}}{\frac{۶}{۵}+۱} + ۷\frac{x^{-\frac{۱}{۲}+۱}}{-\frac{۱}{۲}+۱} + C$$

۸ $\int \frac{(x+۲)^{۲}}{\sqrt[۳]{x}}\,dx = \int \frac{x^{۲}+۴x+۴}{\sqrt[۳]{x}}\,dx = \int x^{-\frac{۱}{۳}}(x^{۲}+۴x+۴)\,dx =$

$$\int (x^{-\frac{۱}{۳}+۲} + ۴x^{-\frac{۱}{۳}} \cdot x + ۴x^{-\frac{۱}{۳}})\,dx = \int (x^{\frac{۵}{۳}} + ۴x^{\frac{۲}{۳}} + ۴x^{-\frac{۱}{۳}})\,dx =$$

$$\frac{x^{\frac{۵}{۳}+۱}}{\frac{۵}{۳}+۱} + ۴\frac{x^{\frac{۲}{۳}+۱}}{\frac{۲}{۳}+۱} + ۴\frac{x^{-\frac{۱}{۳}+۱}}{-\frac{۱}{۳}+۱} + C$$

تمرینات: انتگرال توابع زیر را به دست آورید.

① $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2}$

② $f(x) = 4x\sqrt{x^2+2}$

③ $f(x) = \dfrac{(x-1)^3}{\sqrt{x}}$

④ $f(x) = (5x\sqrt[3]{x^2})\,x^4$

⑤ $f(x) = 12x^4 - \sqrt{x} + 5$

⑥ $f(x) = \dfrac{x^3+3}{x^2}$